

# 光学系统计算机辅助装调中的一种优化算法

张 斌, 张晓辉, 韩昌元

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130021)

**摘要:**如何快速、准确、稳定地确定失调量是光学系统计算机辅助装调技术的一个关键部分。本文首先进行数学建模,建立了失调量与引入像差的关系式,然后提出了求解失调量的伪逆及奇异值巩固逆算法,以解决直接按最小二乘法方程组求解所带来的数值不稳定性及解的不精确性问题。最后,利用本文所建立的数值分析模型,进行了模拟计算,计算结果表明,本文的计算方法是合理可行、有效的。

**关键词:**计算机辅助装调; 失调; 最小二乘法; 法方程组; 伪逆; 奇异值巩固逆

**中图分类号:**TH703 **文献标识码:**A

## 1 引 言

光学系统计算机辅助装调技术是航空航天工程蓬勃壮大、光学系统复杂化及结果精确化的需要;是针对传统装调方法不可视、不定量、随机成分多、装调周期长等优点而提出的一种新的装调手段;是将干涉测量与优化技术相结合,将计算机技术应用于光学系统装调中的一项新技术。用干涉仪测量实际系统各视场的波像差,利用计算机优化确定光学系统的失调量,即各元件位置与设计位置的偏差,从而指导装调过程,使每次重新调整后的光学系统实测波像差尽可能地趋近光学设计的波像差,最终达到装调要求,使成像质量最佳并稳定可靠。

此技术的核心部分是失调量的确定。本文建立了确定过程的数学模型,并提出一种新型算法,通过计算实例,证明此算法的精确性和稳定性。

## 2 数学模型

光学系统的失调量表示系统组装后各元件的位置与设计位置存在的偏差量。失调引入像差,使波像差变大,系统成像质量变坏。确定失调量的问题从数学角度来看就是建立失调量与引入像差之间的关系。

系统的像差用  $F_j (j = 1, 2, \dots, m)$  来表示,各元件位置结构参数用  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  来表示,则二者之间有函数关系表示为:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $f_j (j = 1, 2, \dots, m)$  代表像差与镜面位置之间的函数关系。这是一个十分复杂的非线性方程组。利用幂级数展开,并只选取幂级数的一次项,可以近似地用线性方程来代替:

$$F_j = F_{0j} + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - x_{0n}) \quad (2)$$

公式中  $F_{0j}$  为系统设计时残留的像差值,  $(x_{01} \dots x_{0n})$  为原设计系统各镜面的位置结构参数,  $F_j$  为像差的当前测量得到的值,  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$  为像差对各个位置参数的一阶偏导数。用差商  $\frac{\delta f}{\delta x}$  代替微商  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,可以得到像差与位置结构参数之间的近似线性方程组:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{01} \\ \vdots \\ F_{0m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \Delta x_n \\ \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

用矩阵来表示:

设

$$\Delta F = \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \vdots \\ \Delta F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{01} \\ \vdots \\ F_{0m} \end{bmatrix} \quad \Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \dots \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} \dots \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{bmatrix}$$

则(3)式可写为

$$A\Delta X = \Delta F \quad (4)$$

$\Delta X = X - X_0$ 。为系统中各片镜面需要调整的变化量,即失调量。通常包括沿  $x$  或  $y$  轴的移动量、转动量,各镜面之间的轴向间隔。

$\Delta F = F - F_0$ 。为各校正对象的实测值与光学设计值之差,是由当前的光学系统的波像差实测值和光学设计结果数据来确定。校正对象包括影响光学系统特性参数的高斯光学参数和代表系统成像质量的波像差。

$A$  为灵敏度矩阵,是由光学设计数据,利用公差计算程序确定的已知数据。

### 3 算法实现

#### 3.1 法方程的建立

建立了像差与失调量之间近似的线性方程组  $A\Delta X = \Delta F$  后,对之进行求解,即为失调量。一般情况下,由于像差数  $m$  大于可变的结构参数的个数  $n$ ,方程组(4)是一个超定方程组。不存在满足所有方程式的准确解,只能求它的近似解—最小二乘解<sup>[1]</sup>。

为此,我们定义一个评价函数  $\Phi(\Delta X)$ ,它是优化的校正对象。构造评价函数的最简单方法就是取各像差残量的平方和。像差残量写成矩阵形式为:

$$\varphi = A\Delta X - \Delta F \quad (5)$$

评价函数为:

$$\Phi(\Delta X) = \varphi^T \varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i^2 \quad (6)$$

评价函数越小,像差残量越小,系统越接近设计要求。所以, $\Phi(\Delta X)$ 的极小值解就是方程组(4)的最小二乘解。根据多元函数的极值理论及矩阵运算和求导规则可得到:

$$A^T A \Delta X = A^T \Delta F \quad (7)$$

方程组(7)叫做法方程组,或正则方程组。只要方阵  $(A^T A)$  为非奇异矩阵,则逆矩阵  $(A^T A)^{-1}$  存在,

方程式就有解:

$$\Delta X = (A^T A)^{-1} A^T \Delta F \quad (8)$$

$\Delta X$  是使评价函数极小的解,也就是线性方程组的最小二乘解,即系统的失调量。

#### 3.2 法方程组的求解

系统失调量的确定过程就是法方程组的求解过程。但是,由于法方程组本身的某些特点,直接求解会得出不好的结果。法方程组的系数的形成成为矩阵  $A^T$  与  $A$  的乘积,不仅会引入舍入误差,增加运算量,而且有时还会破坏原来矩阵  $A$  的某些有用的特殊形状。此外,系数矩阵  $A^T A$  的条件数是  $A$  的条件数的平方,故法方程组可能严重病态,造成计算错误,从而使求解失败。因此,应避免直接解法方程组,有必要采用具有更高数值稳定性的计算方法来解决问题。伪逆定义的提出及奇异值分解<sup>[2~3]</sup>是最佳的方法。

由矩阵理论可知,对于方阵  $A$ ,当且仅当  $A$  是满秩时,其逆  $A^{-1}$  才有意义,并且  $A$  与  $A^{-1}$  满足如下关系式:

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I \quad (9)$$

对于解线性方程组  $Ax = B$  就创造了方便条件,即  $x = A^{-1}B$ 。不过,非奇异方阵仅仅是矩阵的一种特殊情形。事实上,我们在此所遇到的系数矩阵是长方阵,即行、列数不相等  $m \neq n$ 。因此,我们将逆矩阵的概念加以推广,使对任意  $m \times n$  矩阵  $A$ ,且  $A$  可以具有任意秩,都存在某种意义的“逆矩阵”—广义逆矩阵。在此我们讨论并使用的是 Moore-Penrose 广义逆,也叫做伪逆,记做  $A^+$ 。虽然最小二乘解一般不唯一,但是极小范数最小二乘解却是唯一的。可由 Moore-Penrose 逆  $A^+$  表出  $x = A^+ B$ ,若方程组相容,则最小二乘解与一般意义下的解一致。

定义 1 设有矩阵  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,对于矩阵  $G [g_{ij}]_{n \times m}$ ,满足如下四个方程

$$\begin{aligned} AGA &= A \\ (GA)^T &= GA \\ GAG &= G \\ (AG)^T &= AG \end{aligned}$$

则称矩阵  $G$  为矩阵  $A$  的 Moore-Penrose 广义逆,也叫伪逆,记做  $A^+$ 。

定理 1 对于任意矩阵  $A$ ,它的 Moore-Penrose 广义逆必然存在,且唯一。

定理 2 矛盾方程组  $Ax=B$  的最小二乘范数解为  $x=A^+B$ ,其中  $A^+$  是 Moore-Penrose 广义逆。

利用广义逆来接线性方程组,最关键就是求解矩阵  $A$  的广义逆。在此提出采用奇异值分解法(Singular Value Decomposition),这个技术可以给出最高的准确度。

在实际应用中,由于像差和失调量之间的关系实际上是非线性的。并且光学系统复杂,调整变数很多,很可能若干调整变量之间出现近似相关的现象。这就使矩阵  $A^T A$  的行列值接近于零, $A^T A$  接近奇异,按最小二乘求出的解很大,大大超出了近似线性的区域,即有些解是干扰解。因此,在要求评价函数  $\Phi(\Delta X)$  下降的基础上,对解向量的模进行限制。表示为:

$$\min \left\{ \varphi(\Delta x) + p^2 \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 \right\} \quad (10)$$

其中  $\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 = \Delta x^T \Delta x$ ,  $p$  为阻尼因子。

这样,法方程组(7)变为:

$$(A^T A + p^2 I) \Delta X = A^T \Delta F \quad (11)$$

$I$  为单位矩阵

其解为:

$$\Delta X = (A^T A + p^2 I)^{-1} A^T \Delta F \quad (12)$$

这里提出一个新的重要概念,即定义  $A^* = (A^T A + p^2 I)^{-1} A^T$ ,称作奇异值巩固逆。如果  $p=0$ ,那么,  $A^* = (A^T A)^{-1} A^T = A^+$ ,这时无阻尼的奇异值

$$A^* = V \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + p_1^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2 + p_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\sigma_m}{\sigma_m^2 + p_m^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} U^T \quad (18)$$

因此

$$\Delta X = A^* \cdot \Delta F \quad (19)$$

根据此算法,用 C 语言编制了求解的程序。输入

巩固逆就变为伪逆。同样,利用奇异值分解法可以快速、稳定地求出  $A^*$ 。

### 3.3 算法描述

$m \times n$  矩阵  $A$  的奇异值分解(SVD)式为:

$$A = U D V^T \quad (13)$$

$U \in R^{m \times m}$ ,  $V \in R^{n \times n}$  是正交矩阵,并且  $U^T = U^{-1}$ ,  $V^T = V^{-1}$

$D \in R^{m \times n}$  为对角矩阵,表示为:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_m & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$  称为  $A$  的奇异值,且  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m$

由(13)式给出的  $A$  的 Moore-Penrose 广义逆为:

$$A^+ = V D^+ U^T \quad (15)$$

其中  $D^+$  是  $n \times m$  对角矩阵,并且

$$D(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \sigma_i = 0 \end{cases} \quad (16)$$

仍然利用奇异值分解,这样可以求出奇异值巩固逆为:

$$\begin{aligned} A^* &= (A^T A + p^2 I)^{-1} A^T \\ &= (V D^T U^T \cdot U D V^T + p^2 V V^T)^{-1} \cdot V D^T U^T \\ &= (V D^T D V^T + p^2 V V^T)^{-1} V D^T U^T \\ &= \{V(D^T D + p^2 I)^{-1} V^T\} V D^T U^T \\ &= V \{(D^T D + p^2 I)^{-1} D^T\} U^T \end{aligned} \quad (17)$$

所以

是表征系统失调的一系列像差,即  $\Delta F$  值,输出为系统的失调量  $\Delta X$ 。

## 4 计算实例

在完成了数学建模、算法研究及软件编制的基础上,由计算机模拟出系统失调情况,通过现有光学系统设计软件,进行了数值模拟计算。表 1 给出了三镜离轴光学系统的计算机模拟失调情况及利用此算法的回归计算结果。此系统的结构如图 1 所示。其中,  $\Delta d_1$ ,  $\Delta d_2$  分别为主镜与次镜、次镜与第三镜之间的轴向间隔变化量;  $\Delta x_1$ ,  $\Delta y_1$ ,  $\Delta T_{x_1}$ ,  $\Delta T_{y_1}$  为次镜沿  $x, y$  轴的偏心和倾斜变化量;  $\Delta x_2$ ,  $\Delta y_2$ ,  $\Delta T_{x_2}$ ,  $\Delta T_{y_2}$  为第三镜沿  $x, y$  轴的

偏心和倾斜变化量。

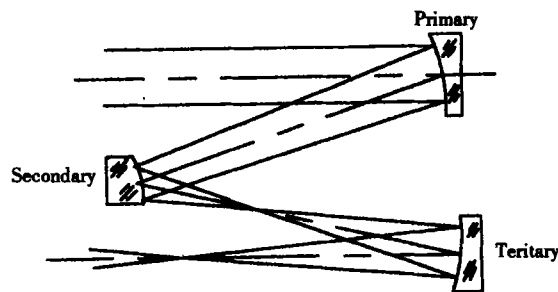


Fig. 1 Three-mirror off-axis optical design layout

Table 1 The comparison of the simulant misalignment and the calculated result

Simulant misalignment	$\Delta d_2 = -0.06$	$\Delta T_{x_1} = 0.05$	$\Delta d_1 = 0.2$ $\Delta d_2 = -0.1$	$\Delta x_1 = 0.02$ $\Delta T_{x_1} = 0.01$ $\Delta y_1 = 0.03$	$\Delta d_1 = -0.03$ $\Delta d_2 = -0.05$ $\Delta T_{x_2} = -0.04$	$\Delta T_{x_1} = 0.$ $03\Delta T_{y_1} = 0.$ $02\Delta T_{y_2} = 0.03$
results	results	results	results	results	results	results
$\Delta d_1$	0.000083	0.000066	0.200088	-0.000001	-0.02998	
$\Delta d_2$	-0.059	0.0011	-0.09144	-0.00033	-0.051	
$\Delta x_1$	-0.0032	-0.0042	-0.00793	0.0194	-0.0045	
$\Delta y_1$	0.0026	0.0018	0.00632	0.03057	0.0011	
$\Delta T_{x_1}$	-0.00051	0.0497	-0.00119	0.0099	-0.03	
$\Delta T_{y_1}$	-0.00056	-0.00056	-0.00139	-0.0001	0.019	
$\Delta x_2$	-0.00455	-0.00055	-0.0065	0.00037	-0.009	
$\Delta y_2$	0.006	0.00062	0.0034	-0.00167	-0.0018	
$\Delta T_{x_2}$	0.000134	0.00035	0.000302	0.000105	-0.0395	
$\Delta T_{y_2}$	-0.0002	-0.000067	-0.00009	-0.00006	0.0295	

表 2 给出了针对两镜、共轴的 Cassegrain 光学系统计算机模拟失调情况及回归计算结果。此系统的结构如图 2 所示。其中,  $\Delta d$  为次镜与主镜的轴向间隔变化量;  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta T_x$ ,  $\Delta T_y$  分别为次镜沿  $x, y$  轴的偏心和倾斜。

由表中的结果对比可以看出回归计算的结果基本上反映了模拟的失调情况,即可以明确地给出失调量,从而指导光学系统的装调过程,因此证明了此算法的可行性和准确性。

Table 2 The comparison of the simulant misalignment and the calculated result

Simulant misalignment	$\Delta d = -0.08$	$\Delta y = 0.03$	$\Delta T_y = -0.008$	$\Delta T_x = 0.004$ $\Delta T_y = -0.002$	$\Delta x = 0.05$ $\Delta y = 0.03$
results	results	results	results	results	results
$\Delta d$	-0.0796	0.000027	0.0000053	-0.000093	-0.000075
$\Delta x$	0.00098	0.0348	0.00029	0.000059	0.0472
$\Delta y$	-0.00046	0.0012	-0.0000297	0.00014	0.0264
$\Delta T_x$	0.00002	-0.000024	0.0000073	0.003996	0.0012
$\Delta T_y$	0.000038	0.00017	-0.00798	-0.00199	0.00076

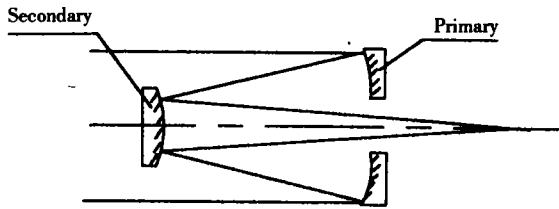


Fig. 2 Cassegrain optical design layout

调量确定这一关键问题,进行了数学模型的建立、算法的讨论及模拟计算。提出了伪逆、奇异值巩固逆的概念和定义,并利用奇异值分解方法推导出更为实用的算法。算法的推导虽然较复杂,但计算过程却较简单,并且条理清晰,极适于程序的编制。模拟计算结果表明该方法的确是一种较理想的,应用于光学系统计算机辅助装调中失调量确定的较精确的方法。此算法也可以应用于机械、电子等需处理最小二乘问题的分析领域中,具有广泛的应用前景。

## 5 结 论

为了解决光学系统计算机辅助装调技术中失

### 参考文献:

- [1] 布耶哈马著. 误差理论与广义逆矩阵[M]. 北京:测绘出版社,1980
- [2] 杨麓引,马正午,孙宇,等编. 电子计算机应用数学[M]. 北京:冶金工业出版社,1979.
- [3] 史策昌编著. 矩阵分析[M]. 北京. 北京理工大学出版社,1996.

### Algorithm for misalignment determination in computer-aided alignment of optical system

ZHANG Bin, ZHANG Xiao-Hui, HAN Chang-Yuan

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,  
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130021, China)

**Abstract:** How to determine the misalignment quickly, exactly and constantly is the key to the technology of computer-aided optical alignment. First, the mathematical simulation, which is the relationship between the misalignment and the aberrations is founded. Then, the concept of pseudoinverse and the algorithm of the singularity robust inverse are proposed in order to solve the problems of the numerical instability and the result inaccuracy which result from the solution for least-squares method directly. Finally, the simulant calculation is processed using the numerical analysis model established in this essay. The result shows that the computation method is rational and effective.

**Key words:** computer-aided alignment; misalignment; least-squares method; pseudoinverse; singularity robust inverse

**作者简介:**张斌(1972-),女,吉林九台市人。1994年毕业于长春光学精密机械学院光电工程系。1997年获得长春光学精密机械学院工学硕士学位。同年考入中国科学院长春光学精密机械研究所攻读博士学位。主要从事近代光学测试技术方面的研究。